
* NOTE SUI SISTEMI LINEARI RISOLUBILI COL METODO DEI MINIMI QUADRATI *

(di Franco Milani)

In astronomia e in altre scienze ci si trova spesso nella situazione di rappresentare l'andamento di un certo fenomeno con una equazione lineare in piu' incognite, i cui coefficienti rappresentano quantita' gia' note o valutabili con l'osservazione. Con piu' determinazioni, si arriva ad ottenere un sistema lineare in cui il numero di equazioni puo' superare il numero di incognite. In quei casi, se le osservazioni si comportano secondo la legge normale degli errori e quindi vige il principio della media aritmetica (gli errori tendono a compensarsi), il metodo dei minimi quadrati puo' consentire di determinare i valori piu' probabili per le incognite ed anche i relativi errori standard.

Nel seguito esamineremo i passi di un procedimento di calcolo di questo tipo, correlato da un esempio. Data la diffusa disinformazione su questi metodi, mi auguro che possa essere utile.

Sia dato un sistema in M equazioni ed N incognite dove $M > N$ (numero di equazioni maggiore di quello delle incognite), nella forma seguente:

$$A_{11}X_1 + A_{12}X_2 + \dots + A_{1N}X_N = C_1$$

$$A_{21}X_1 + A_{22}X_2 + \dots + A_{2N}X_N = C_2$$

$$\dots \dots \dots$$

$$A_{M1}X_1 + A_{M2}X_2 + \dots + A_{MN}X_N = C_M$$

Il principio dei minimi quadrati consente di trovare l'unica soluzione $X_1, X_2, \dots, X_N$ per la quale e' minima la somma dei quadrati degli scarti fra valori calcolati e valori osservati, ossia la somma dei quadrati dei valori

$$A_{11}X_1 + A_{12}X_2 + \dots + A_{1N}X_N - C_1$$

dove gli X_{IJ} sono quelli calcolati trovando la soluzione, e non i valori "veri".

I dati noti sono i coefficienti A_{IJ} e i termini noti C_I , e quelli da determinare sono le incognite X_I .

Il metodo di risoluzione consente di "trasformare" il sistema iniziale in M equazioni ed N incognite in un nuovo sistema in N equazioni ed N incognite, detto "sistema di equazioni normali", che avendo il numero di equazioni pari a quello delle incognite sara' poi risolubile coi metodi standard delle matrici.

La prima parte del procedimento consiste quindi nella trasformazione del sistema in sistema ad N incognite ed N equazioni, e si effettua in N passi nel modo seguente:

- 1) si moltiplicano tutti i termini delle equazioni del sistema iniziale per i loro primi coefficienti, poi si sommano membro a membro le equazioni cosi' trasformate, ottenendo la prima equazione normale;
- 2) si moltiplicano tutti i termini delle equazioni del sistema iniziale per i loro secondi coefficienti, poi si sommano membro a membro le equazioni cosi' trasformate, ottenendo la seconda equazione normale;

... ..

N) si moltiplicano tutti i termini delle equazioni del sistema

44

Si risolve infine il sistema delle N equazioni normali coi metodi standard, ricavandone il determinante della matrice incompleta (che serve anche poi per il calcolo degli errori standard) e le incognite $X_1, X_2, \dots, X_N$.

Si procede poi, se necessario, al calcolo dell'errore standard globale e degli errori standard relativi alle singole incognite (S.E. = Standard Error), nel modo seguente.

Con le incognite $X_1, X_2, \dots, X_N$ calcolate, si possono determinare dalle M equazioni iniziali M residui, dati da:

$$R1 = A11*X1 + A12*X2 + \dots + A1N*XN - C1$$

$$R2 = A21 * X1 + A22 * X2 + \dots + A2N * XN - C2$$

$$RM = AM1 \times X1 + AM2 \times X2 + \dots + AMN \times XN - CM$$

e quindi si puo' calcolare la somma Q dei quadrati dei residui RI

$$Q = R_1 * R_1 + R_2 * R_2 + \dots + R_M * R_M \quad \text{PO} = MX * X^T A +$$

L'errore standard globale EG e' dato allora dalla radice quadrata di Q diviso per M-N (numero equazioni meno numero incognite)

EG = SQR(Q/(M-N))

Per calcolare gli errori standard relativi alle incognite, facciamo riferimento al determinante della matrice (quadrata) incompleta del sistema di equazioni normali, che avremo già calcolato:

	K11	K12	...	K1N
	K21	K22	...	K2N
D =				
	KN1	KN2	...	KNN

dove i K_{ij} sono i coefficienti delle equazioni normali ricavati col procedimento iniziale.

Denominiamo con $L(I)$ il determinante del minore della matrice ottenuto sopprimendo la riga e la colonna a cui appartiene il coefficiente K_{II} ; avremo allora N determinanti $L(I)$ ciascuno relativo ad un'incognita, e gli errori standard relativi alle incognite saranno:

```

EI = EG*SQR(L(I)/D)

```

cioe' si ottengono estraendo le radici quadrate dei quozienti degli $L(I)$ divisi per il determinante D della matrice incompleta del sistema di equazioni normali.

esempio di calcolo

Supponiamo di dover risolvere col metodo dei minimi quadrati il seguente sistema:

$$\begin{aligned} 2X + 4Y + 3Z &= 20 \\ 3X + 5Y + 8Z &= 42 \\ 6X + 7Y + 9Z &= 80 \\ X + 3Y + 2Z &= 15 \end{aligned}$$

(i coefficienti sono stati scelti in modo casuale, quindi dovremo aspettarci degli errori standard piuttosto elevati)

moltiplichiamo termine a termine le equazioni per i loro coefficienti di X (la prima per 2, la seconda per 3, la terza per 6 e la quarta per 1), ottenendo la tabella seguente:

4	8	6	40
9	15	24	126
36	42	54	480
1	3	2	15
50	68	86	661

(<-- somme delle singole colonne)

sommando le singole colonne, si hanno i coefficienti della prima equazione normale, che risulta essere:

$$50X + 68Y + 86Z = 661$$

moltiplichiamo ora le equazioni termine a termine per i coefficienti di Y, ottenendo:

8	16	12	80
15	25	40	210
42	49	63	560
3	9	6	45
68	99	121	895

(<-- somme delle singole colonne)

quindi la seconda equazione normale e':

$$50X + 99Y + 121Z = 895$$

moltiplichiamo le equazioni termine a termine per i coefficienti di Z, ottenendo:

6	12	9	60
24	40	64	336
54	63	81	720
2	6	4	30
86	121	158	1146

(<-- somme delle singole colonne)

e la terza equazione normale e' quindi:

$$86X + 121Y + 158Z = 1146$$

abbiamo cosi' ottenuto il sistema delle equazioni normali:

$$\begin{aligned} 50X + 68Y + 86Z &= 661 \\ 68X + 99Y + 121Z &= 895 \\ 86X + 121Y + 158Z &= 1146 \end{aligned}$$

calcoliamone il determinante della matrice incompleta

$$\begin{vmatrix} 50 & 68 & 86 \end{vmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} 68 & 99 & 121 \\ 86 & 121 & 158 \end{vmatrix} = 2470$$

Le soluzioni, ricavate coi metodi di calcolo usuali e approssimate a due decimali, sono:

$$\begin{aligned} X &= 31395/2470 = 12.71 \\ Y &= -3830/2470 = -1.55 \\ Z &= 3760/2470 = 1.52 \end{aligned}$$

calcoliamo gli scarti sostituendo le incognite così determinate nelle equazioni iniziali

$$\begin{aligned} 2*12.71 + 4*(-1.55) + 3*1.52 - 20 &= 3.78 \\ 3*12.71 + 5*(-1.55) + 8*1.52 - 42 &= .54 \\ 6*12.71 + 7*(-1.55) + 9*1.52 - 80 &= -.91 \\ 12.71 + 3*(-1.55) + 2*1.52 - 15 &= -3.90 \end{aligned}$$

la somma dei quadrati degli scarti è data da:

$$Q = 3.78*3.78 + .54*.54 + .91*.91 + 3.90*3.90 = 30.62$$

l'errore standard globale è quindi:

$$EG = \text{SQR}(30.62/(4-3)) = 5.53$$

calcoliamo ora i determinanti dei minori relativi alle incognite

$$L(X) = \begin{vmatrix} 99 & 121 \\ 121 & 158 \end{vmatrix} = 1001; \quad L(Y) = \begin{vmatrix} 150 & 86 \\ 86 & 158 \end{vmatrix} = 504; \quad L(Z) = \begin{vmatrix} 150 & 68 \\ 168 & 99 \end{vmatrix} = 326$$

gli errori standard relativi alle incognite sono allora:

$$\begin{aligned} EX &= EG*\text{SQR}(L(X)/D) = 5.53*\text{SQR}(1001/2470) = 3.52 \\ EY &= EG*\text{SQR}(L(Y)/D) = 5.53*\text{SQR}(504/2470) = 2.50 \\ EZ &= EG*\text{SQR}(L(Z)/D) = 5.53*\text{SQR}(326/2470) = 2.00 \end{aligned}$$

avremo quindi in definitiva per le soluzioni i valori:

$$\begin{aligned} X &= 12.71 \pm 3.52 \quad (\text{S.E.}) \\ Y &= -1.55 \pm 2.50 \quad (\text{S.E.}) \\ Z &= 1.52 \pm 2.00 \quad (\text{S.E.}) \end{aligned}$$

con un errore globale di 5.53 (S.E.)
