a10.TXT

Come sappiamo l'assunto fondamentale della geometria euclidea e' che per due punti possano passare due e soltanto due rette parallele. Rigettare questo assunto significa permettere, almeno in linea di principio, che per due punti possano anche non passare rette parallele, o che ne possano passare infinite (geometrie iperboliche). Ferma restando la definizione di retta, tutto questo dipende dalla struttura dello spazio nel quale si costruisce la propria geometria. Una geometria euclidea piana per esempio mostra tutti i propri limiti quando si tenta di utilizzarla su superfici bidimensionali curve. Supponiamo per esempio di voler fissare alla superficie terrestre un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, in modo da poter riconoscere facilmente la posizione di un corpo su di essa. Potremmo per esempio piazzarci sull'equatore, armarci di tondini di ferro lunghi 1km. e cominciare a costruire una rete numerando ogni pezzo in base alla sua distanza dall'origine. Dopo aver piazzato poche centinaia di pezzi in direzione Nord-Sud, ci renderemmo subito conto dell'inadeguatezza dell'operazione: i pezzi trasversali, a causa della curvatura della superficie terrestre, comincierebbero ben presto ad essere troppo lunghi per essere congiunti e ci troveremmo a doverli accorciare in misura sempre maggiore all'aumentare della latitudine raggiunta. L'unico modo per risolvere il problema, naturalmente, e' quello di basarci su pezzi la cui lunghezza sia proporzionale al coseno della latitudine, costruendo un sistema di meridiani e paralleli come quello attualmente utilizzato per le misure di posizione. Per una superficie curva piu' complessa il problema e' molto piu' difficile da definire.

Nel 1854 il matematico tedesco G.F.B.Riemann trovo' una generalizzazione della geometria euclidea per gli spazi curvi. In sunto il problema si puo' affrontare in termini differenziali: invece di definire la geometria in base a lunghezze finite, si definiscono delle relazioni tra lunghezze differenziali, dipendenti dalle proprieta' locali della superficie in questione. In termini piu' semplici sarebbe come costruire la nostra "rete di riferimento" con pezzi lunghi non 1km, bensi' 1cm o 1mm, a seconda della complessita' della nostra superficie. L'unita' di lunghezza dovrebbe essere assunta dipendentemente dalla "curvatura" della superficie. Il risultato sarebbe una rete tutta storta, piu' densa da una parte, piu' diluita dall'altra, tuttavia sempre connessa senza sforzi ne' tensioni. Le distanze tra i punti su questa superficie non andrebbero piu' calcolate con la relazione classica euclidea:

$$s = \sqrt{(x2-x1)^2 - (y2-y1)^2}\,, \qquad (1)$$

bensi' in termini differenziali: la distanza "infinitesima" tra due punti distanti dx in ascissa e dy in ordinata sarebbe dunque

$$ds = \sqrt{a(x,y)^2\, dx^2 + b(x,y)^2\, dy^2} \qquad (2)$$

che deve essere integrata tra i due estremi (x1,y1) e (x2,y2) per ottenere la distanza s. La forma della superficie e la sua curvatura entrano nei termini a e b, ovviamente dipendenti dalla posizione del punto considerato. La complicazione e' soltanto apparente: valgono tutte le leggi geometriche che conosciamo, inoltre le coordinate di qualsiasi punto sulla superficie sono univocamente stabilite e facili da calcolare una volta note le proprieta' locali della superficie a(x,y) e b(x,y).

Riemann dimostro' che uno spazio curvo puo' avere un numero qualsiasi di dimensioni, e che la curvatura non necessariamente si riferisce ad una dimensione supplementare, ma puo' essere "intrinseca". Tornando all'esempio bidimensionale, possiamo immaginarci la situazione di un mondo sferico abitato da esseri piatti. La superficie del loro mondo, assolutamente piatta, non presenta montagne o vallate, tuttavia presenta gli stessi

problemi di connessione illustrati prima: questi esseri hanno sviluppato la geometria piana, conoscono il cerchio, il quadrato, tutte le figure piane, ma non hanno nessuna percezione della profondita'.
Questi esseri-sogliola, tracciando un circolo sul loro mondo piatto, hanno scoperto che il rapporto tra circonferenza e diametro e' un numero fisso le cui prime 15 cifre significative sono 3.14159265358979 (il famoso pi greco). Tuttavia osservano un giorno che tracciando circoli sempre piu' grandi questo numero comincia a diminuire ! Tracciando un circolo grande come il circolo massimo del loro pianeta, pi greco e' diventato esattamente 2 ! Noi, dall'alto delle nostre 3 dimensioni, osservando i loro sforzi patetici, ridiamo pensando: "Ma guarda che stupidi, non hanno pensato che in realta' il diametro del loro circolo deve seguire la curvatura del loro mondo e che quindi e' molto maggiore del minimo percorso tra i due punti opposti del circolo !". Niente affatto ! Il minimo percorso tra i due punti opposti del circolo deve proprio seguire la curvatura, dal momento che non esiste una terza dimensione. Quello che accade e' che le proprieta' geometriche del loro spazio modificano il comportamento delle figure su grande scala. Il loro e' uno spazio bidimensionale intrinsecamente curvo ! Siamo noi gli ignoranti in quanto dobbiamo per forza immaginarci una terza dimensione attorno alla quale si sviluppa la curvatura di uno spazio bidimensionale. Ma le sorprese non finiscono qui: indisposti dal carattere aleatorio della loro geometria, gli esseri-sogliola proseguono il loro esperimento tracciando circoli con "raggi" sempre crescenti, fino al punto in cui, quando il diametro del loro circolo e' lungo quanto la circonferenza del loro mondo, il circolo che ottengono si riduce ad un punto ! Non soddisfatti di cio', due di questi scienziati-sogliola partono per direzioni diverse in esplorazione del loro universo. Camminando sempre in linea retta un giorno si ri-incontrano. Avendo tuttavia contato i passi dal giorno della partenza, la loro conclusione (corretta) e' quella di abitare in un mondo bidimensionale intrinsecamente curvo, finito (in estensione) ma illimitato (non hanno incontrato alcun confine del loro universo), con raggio R, curvatura 1/(R^2) e superficie totale 4*pi*R^2.

Consci della dura lezione impartita dagli esseri-sogliola, un giorno anche i nostri scienziati tri-dimensionali si chiesero se il nostro Universo non potesse essere in realta' intrinsecamente curvo. Le difficolta' nell'immaginare un Universo siffatto sono ovviamente legate alla nostra percezione sensoriale rigidamente limitata alle tre dimensioni euclidee. Riprendendo l'esperimento degli scienziati-sogliola si tratterebbe di tracciare sfere sempre piu' grandi e di misurarne la superficie. In uno spazio intrinsecamente curvo, la superficie della nostra sfera divisa per 4 volte il raggio al quadrato, darebbe un rapporto (pi greco) decrescente rispetto al valore che conosciamo. La superficie della sfera, insieme al suo volume, crescerebbe all'aumentare del raggio, fino a raggiungere un massimo per poi cominciare a diminuire fino ad ottenere una sfera di raggio pari al raggio del nostro Universo, ma di superficie e volume... nulli ! E se cercassimo di costruire un sistema di riferimento "assoluto" ? Si potrebbe pensare di costruire un'impalcatura gigante fatta di tubolari rettilinei di uguale lunghezza congiunti in modo fa formare angoli di 90 e 180 gradi. Se lo spazio e' piatto la costruzione proseguirebbe senza difficolta', ma se e' curvo, prima o poi sara' inevitabile dover tirare o accorciare tubolari per farli coincidere. Purtroppo l'entita' della curvatura spaziale del nostro Universo ci imporrebbe di costruire una struttura lunga qualche migliaio di anni-luce prima di cominciare a dover accorciare i tubolari, rendendo vano un test del genere. Per fortuna ci viene incontro la teoria della relativita'.

La generalizzazione della teoria della Relativita' Ristretta a spazi intrinsecamente curvi fu operata da A.Einstein tra il 1912 ed il 1915, con l'aiuto del matematico Marcel H.Grossmann. Il risultato e' una teoria dello spazio-tempo curvo (teoria della Relativita' Generale) che spiega in termini di curvatura una delle quattro interazioni fondamentali: la gravita'. Nella teoria di Einstein la curvatura e' prodotta dalla presenza di materia. La relazione tra quantita' di materia e curvatura e' semplice in linea di principio, ma complicata da calcolarsi. Sono necessarie venti funzioni delle coordinate di un punto nello spazio-tempo (la generalizzazione delle a(x,y) e b(x,y) della (2) per un sistema quadri-dimensionale) per descrivere la curvatura. Dieci di tali funzioni corrispondono ad una parte di questa curvatura che si propaga liberamente sotto forma di onde gravitazionali, o "oscillazioni di curvatura", le altre dieci dipendono dalla distribuzione di massa, dalla quantita' di moto, momento angolare e dalle tensioni interne della materia, nonche' dalla costante di gravitazione universale di Newton G. Con riferimento alla densita' di massa proprie della terra, G e' una costante piccolissima. E' necessaria una quantita' enorme di massa per curvare lo spazio-tempo. La grandezza inversa 1/G si puo' considerare come una misura della "rigidita'" dello spazio-tempo. In base all'esperienza quotidiana dunque lo spazio-tempo e' molto rigido. Per questa ragione la curvatura dello spazio e' al di fuori della nostra esperienza quotidiana, ed e' sempre per questo che uno spazio "piatto" euclideo e' sempre una buona approssimazione per volumi spaziali "ragionevoli" (ovvero inferiori a qualche milione di anni-luce). In pratica correzioni relativistiche sensibili alle misure di distanze e volumi si devono apportare soltanto quando si trattano oggetti lontanissimi come quasars o ammassi di galassie. E qui torniamo alla nostra domanda di partenza: come fare per renderci conto di abitare in un Universo curvo, sa la curvatura e' cosi' tenue ? La risposta e' ovvia: se e' la massa che provoca curvatura, sara' in corrispondenza di oggetti molto massicci che gli effetti diventeranno apprezzabili. Il sole e' un buon esempio di oggetto molto massiccio; nei dintorni del sole quindi la curvatura dello spazio potrebbe essere sufficiente per essere misurata. Nella teoria della Relativita' Generale un corpo in caduta libera (sottoposto all'azione del solo campo gravitazionale) segue una linea universale detta "geodetica". Le equazioni delle geodetiche, ovvero le equazioni che una volta risolte forniscono la forma di una geodetica, contengono gia' nei loro termini il contributo del campo gravitazionale, e si sostituiscono quindi alla classiche equazioni del moto. Nel caso in cui l'oggetto in moto sia un fotone, (la controparte particellare dell'onda elettromagnetica) non c'e' nemmeno attrazione gravitazionale dal momento che questo e' privo di massa. La geodetica di un fotone seguira' dunque una linea retta dello spazio-tempo, ovvero, in altri termini, la luce si propaga nel vuoto sempre in linea retta. L'esperimento quindi consisteva nel tentare di determinare se ci fosse una deviazione della luce di stelle lontane che passasse abbastanza vicina al bordo del sole. Una eventuale deviazione avrebbe dimostrato che le linee rette nello spazio-tempo sono in realta' curve viste nelle 3 dimensioni, ovvero che lo spazio e' intrinsecamente curvo. Si tento' l'esperimanto e si constato' che effettivamente la posizione apparente di stelle abbastanza vicine al bordo solare veniva deviata esattamente della quantita' prevista dalla R.G. Un secondo esperimento fu fatto nel tentativo di spiegare l'avanzamento secolare del periastro dell'orbita di Mercurio attorno al sole. Come noto l'orbita di Mercurio e' piuttosto eccentrica, fatto per cui si distingue, insieme a Plutone, dagli altri pianeti del sistema solare. La linea immaginaria data dall'intersezione del suo piano orbitale col piano dell'eclittica (linea dei nodi) avanza di circa 40 secondi per secolo. In altri termini Mercurio, nella sua orbita, attraversa il piano entro cui ruota la terra in punti sempre diversi ad ogni orbita. Questi punti ruotano nella direzione del moto di Mercurio di 40" per secolo. L'effetto si puo' spiegare facilmente come un effetto del secondo ordine nel campo gravitazionale del sole, dovuto al rigonfiamento equatoriale del nostro astro. Tuttavia l'entita' dello spostamento non puo' essere spiegata completamente in questo modo: fatti i dovuti calcoli e togliendo l'effetto previsto, restavano 14" d'arco per secolo che nessuno riusciva a spiegarsi. Ancora una volta la teoria della R.G. venne in aiuto ai meccanici celesti: il campo gravitazionale del sole provoca una curvatura dello spazio nei dintorni dell'astro, i cui effetti sono sensibili fino ad una distanza pari all'orbita di Mercurio. Per questo motivo un'orbita chiusa di 360 gradi (nel sistema di riferimanto di Mercurio) corrisponde in realta' a meno di 360 gradi nello spazio. Per raffigurarsi l'effetto basta ritagliare un foglio di carta in forma circolare e toglierne uno "spicchio"; riunendo i bordi si otterra' un cono. Lo spazio attorno al sole e' come quel cono: Mercurio, nella sua orbita, la chiudera' dopo 360 gradi, ma per far questo dovra' "avanzare", rispetto al punto di partenza dell'orbita precedente, di un angolo pari a quello che abbiamo ritagliato dal foglio di carta. Ancora una volta i calcoli relativistici mostravano un accordo perfetto con il "residuo" di avanzamento altrimanti inspiegabile !

L'effetto della curvatura su di un corpo in movimento si rappresenta intuitivamente nelle due dimensioni immaginando l'Universo come una "rete da pesca" deformata dal peso degli oggetti che vi sono appoggiati. La traiettoria di un corpo (un pallina che rotola sulla rete) che passi in prossimita' di un oggetto pesante, verra' evidentemente curvata di una quantita' proporzionale alla vicinanza dell'oggetto e alla massa di quest'ultimo. Questo modello tuttavia non e' completo in quanto rappresenta bene la curvatura spaziale, ma non quella temporale. In uno spazio-tempo (un sistema di riferimanto in cui ogni oggetto ed ogni evento hanno 3 coordinate spaziali e una temporale, a seconda di quando avviene l'evento), il movimento puo' essere rappresentato come una rapida successione di "fotografie" della configurazione spaziale dell'intero Universo. Ogni "fotografia" e' la proiezione dell'intero spazio-tempo su di una iper-superficie tri-dimensionale. Nel nostro Universo dunque, anche se stiamo perfettamente immobili, siamo costretti a muoverci molto rapidamente nella direzione temporale. Il tempo e' l'elemento chiave: risulta che, benche' in un campo gravitazionale lo spazio sia curvo, la curvatura temporale e' di gran lunga la piu' importante. Cio' e' dovuto all'elevato valore della velocita' della luce, che collega la scala dello spazio a quella del tempo. Vicino alla terra la curvatura spaziale e' talmente lieve da non potersi rilevare con misurazioni statiche. Tuttavia la nostra precipitosa corsa nel tempo e' cosi' veloce che nelle situazioni dinamiche la curvatura diventa notevole, allo stesso modo in cui una lieve gobba in un'autostrada, pur passando inosservata ad un pedone, puo' diventare pericolosa per un'automobile veloce. Lo spazio attorno alla terra appare piatto fino ad un alto grado di precisione, ma possiamo vedere la curvatura dello spazio-tempo semplicemente lanciando in aria una palla. Se la palla rimane in aria per due secondi, descrive un arco con un'altezza di 5 metri. La luce percorre in due secondi 600.000 km. Ebbene, se immaginiamo l'arco di 5mt. stirato orizzontalmente per 600.000 km, la curvatura dell'arco e' la curvatura dello spazio-tempo. In questo senso possiamo immaginare come un campo gravitazionale maggiore, che imporrebbe alla palla di rimanere in aria molto meno di 2 secondi, corrisponde ad un arco molto meno esteso in direzione temporale e quindi ad una maggior curvatura dello spazio-tempo.

Pierre Marsiaj